

Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till och med den 10 juni 2005.

## NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2005

### Anvisningar

- Provtid** 240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
- Hjälpmedel** **Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.  
*Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.*  
**Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
- Provmaterialet** Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar.  
Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in.  
*Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
- Provet** Provet består av totalt 17 uppgifter. **Del I** består av 9 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter.  
Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel.  
Uppgift 17 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete.  
Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
- Poäng och betygsgränser** Provet ger maximalt 44 poäng.  
Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med  $\square$ , vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna.  
Undre gräns för provbetyget  
Godkänd: 13 poäng.  
Väl godkänd: 26 poäng varav minst 7 vg-poäng.  
Mycket väl godkänd: Utöver kraven för Väl godkänd ska du ha visat prov på flertalet av de MVG-kvaliteter som de  $\square$ -märkta uppgifterna ger möjlighet att visa. Du ska dessutom ha minst 13 vg-poäng.

Namn: \_\_\_\_\_ Skola: \_\_\_\_\_

Komvux/gymnasieprogram: \_\_\_\_\_

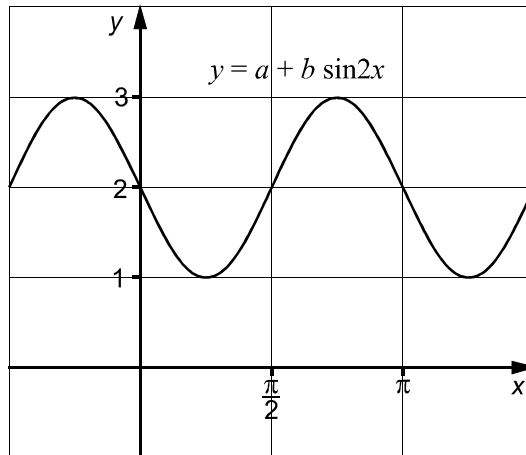
## Del I

**Denna del består av 9 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.**

1. Beräkna  $\int_1^3 (x^2 - 1) dx$  (2/0)
2. Bestäm  $f'(x)$  om
- a)  $f(x) = 4 \cos 3x$  *Endast svar fordras* (1/0)
- b)  $f(x) = (3 - 2x)^6$  *Endast svar fordras* (1/0)
- c)  $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$  *Endast svar fordras* (0/1)
3. Vilka två av funktionerna  $F(x)$  nedan är primitiv funktion till  $f(x) = 3x^5 + 1$ ? *Endast svar fordras* (1/0)
- A  $F(x) = \frac{3x^4}{4}$
- B  $F(x) = 15x^4$
- C  $F(x) = 0,5x^6 + x$
- D  $F(x) = x^6 + 2x$
- E  $F(x) = \frac{x^6}{3} + x + 1$
- F  $F(x) = \frac{x^6}{2} + x - 14$

4. Ordna följande tal i storleksordning:  
 $a = \sin 24^\circ$ ,  $b = \cos 100^\circ$  och  $c = \sin 165^\circ$   
 Motivera ditt svar. (1/1)

5. Figuren visar grafen till funktionen  $y = a + b \sin 2x$   
 Bestäm konstanterna  $a$  och  $b$ . *Endast svar fordras* (1/1)



6. Vilket av följande uttryck A – F kan förenklas till 1?  
*Endast svar fordras* (0/1)

- A  $(\sin x + \cos x)^2$   
 B  $(\sin x - \cos x)^2$   
 C  $(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$   
 D  $\cos x(\tan x \cdot \sin x + \cos x)$   
 E  $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$   
 F  $2(\sin x + \cos x)$

7.



Antalet starar i Sverige har undersökts sedan 1979. Resultaten av denna undersökning kan matematiskt beskrivas med differentialekvationen:

$$\frac{dy}{dt} = -0,03 \cdot y, \text{ där } y \text{ är antalet starar vid tiden } t \text{ år från 1979.}$$

Förklara med egna ord innebörden av differentialekvationen i detta sammanhang. (1/1)

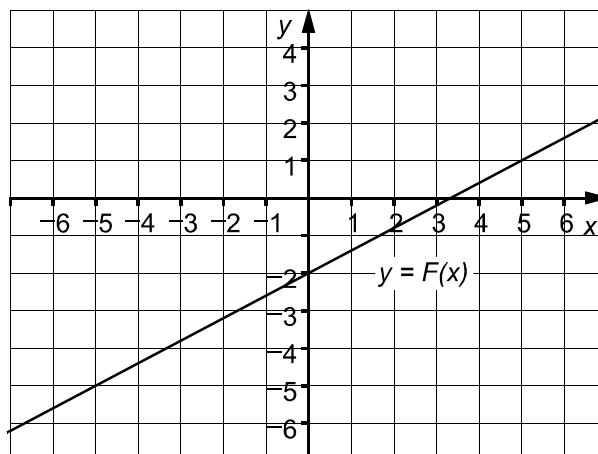
8. I triangeln  $ABC$  är vinkeln  $A = 90^\circ$   
Visa att  $\sin B = \cos C$

(0/1/□)

9. Funktionen  $F$  är primitiv funktion till  $f$   
Figuren nedan visar  $y = F(x)$

Bestäm  $\int_0^5 f(x) dx$

(0/2/□)

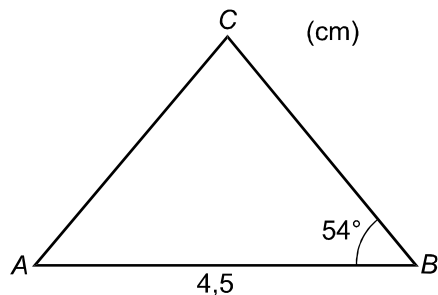


## Del II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

10. I triangeln  $ABC$  är sidorna  $AC$  och  $BC$  lika långa. Beräkna triangelns area.

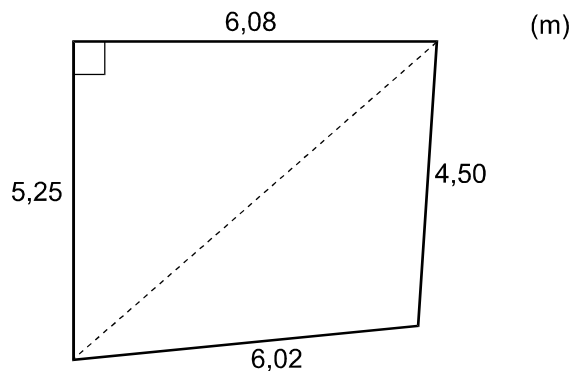
(2/0)



11. Beräkna med hjälp av primitiv funktion arean av det område som begränsas av funktionerna  $f(x) = x^2 + x + 1$  och  $g(x) = 9 - x$

(3/0)

12. Daniel och Linda tittar på en lägenhet. Enligt uppgift är vardagsrummet  $31,2 \text{ m}^2$ . De vill kontrollera om detta stämmer och mäter väggarna och ritar en skiss över rummet. De vet att ett hörn i rummet är rätvinkligt. Så här ser deras skiss ut.



Vilken area har vardagsrummet enligt Daniels och Lindas skiss?

(2/2)

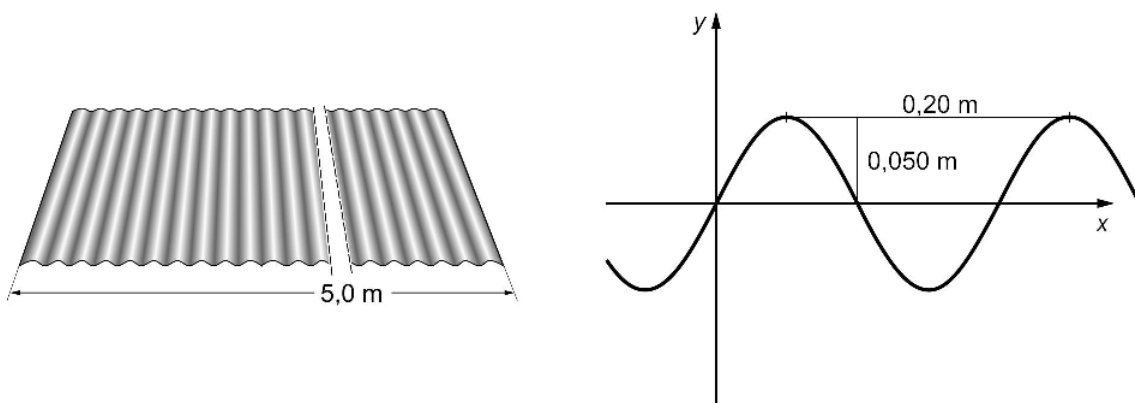
13. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen  $\sin 3x = 0,421$

(2/1)

14. Bestäm *antalet* lösningar till ekvationen  $\sin 2x = \frac{x^2}{10} - 1$ ,  
där  $x$  mäts i radianer.

(1/1)

15. En korrugerad plåt tillverkas genom att en plan plåt veckas. Sedd från sidan har den korrugerade plåten på bilden formen av en sinuskurva med perioden 0,20 m och amplituden 0,050 m.

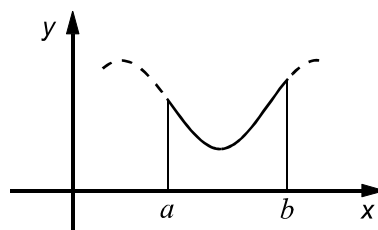


- a) Bestäm en formel för ”plåtkurvan” på formen  $f(x) = A \sin kx$

(0/1)

Det finns en formel för beräkning av kurvlängd. Enligt denna gäller att längden  $s$  av en kurva  $y = f(x)$  från  $x = a$  till  $x = b$  kan beräknas som:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



- b) Hur lång *plan* plåt ska man utgå ifrån för att den korrugerade plåtens längd ska bli 5,0 m?

(0/3/□)

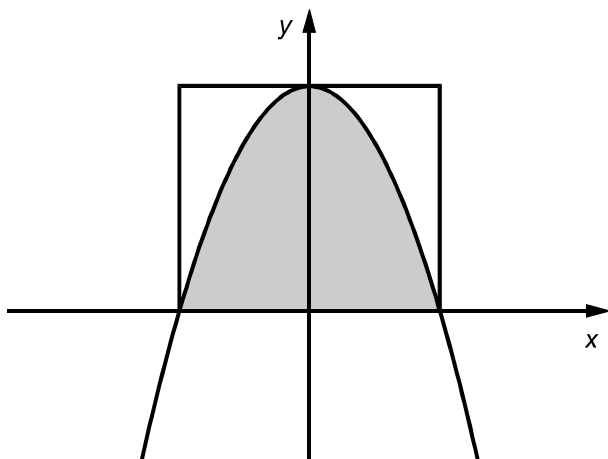
16. För vilka värden på konstanterna  $a$  och  $b$  gäller det att funktionen  $f(x) = ax^2 + bx - \sin 3x$  har ett lokalt maximum för  $x = 0$ ?

(1/2/□)

**Vid bedömning av ditt arbete med uppgiften kommer läraren att ta hänsyn till:**

- Hur väl du utför dina beräkningar
- Hur väl du motiverar dina slutsatser
- Hur väl du redovisar ditt arbete
- Hur väl du använder det matematiska språket

17. Figuren visar en parabel och en rektangel i ett koordinatsystem. Det skuggade området är begränsat av parabeln och  $x$ -axeln. Arealen av det skuggade området kallas i fortsättningen parabelarean.



Två av rektangelns hörn sammanfaller med kurvans skärningspunkter med  $x$ -axeln.  
En av rektangelsidorna tangerar kurvans maximipunkt.

I den här uppgiften ska du undersöka förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.

Låt parabelns ekvation vara  $y = b - ax^2$ , där  $a$  och  $b$  är positiva tal.

- Du kan då börja t.ex. med att sätta  $b = 9$  och  $a = 1$  och rita grafen till funktionen  $y = 9 - x^2$ . Bestäm därefter förhållandet mellan parabelarean och rektangelarean.
- Välj själv andra exempel och försök formulera en slutsats utifrån dina valda exempel.
- Undersök om din slutsats även gäller i det allmänna fallet med parabeln  $y = b - ax^2$

Om du vill kan du istället undersöka det allmänna fallet direkt.

(3/4/□)

## Innehåll

Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000 .....	3
Sammanställning av hur mål och kriterier berörs av kursprovet.....	4
Kravgränser .....	5
Allmänna riktlinjer för bedömning .....	6
Bedömningsanvisningar del I och del II .....	7
Mål för matematik kurs D - Kursplan 2000 .....	19
Betygskriterier 2000.....	20
Kopieringsunderlag för aspektbedömning .....	21
Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter .....	22

## Mål att sträva mot i Kursplan för matematik 2000

Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna

1. utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
2. utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer,
3. utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet,
4. utvecklar sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt,
5. utvecklar sin förmåga att med hjälp av matematik lösa problem på egen hand och i grupp bl.a. av betydelse för vald studieinriktning samt att tolka och värdera lösningarna i förhållande till det ursprungliga problemet,
6. utvecklar sin förmåga att reflektera över sina erfarenheter av begrepp och metoder i matematiken och sina egna matematiska aktiviteter,
7. utvecklar sin förmåga att i projekt och gruppdiskussioner arbeta med sin begreppsbyggnad samt formulera och motivera olika metoder för problemlösning,
8. utvecklar sin förmåga att utforma, förfina och använda matematiska modeller samt att kritiskt bedöma modellernas förutsättningar, möjligheter och begränsningar,
9. fördjupar sin insikt om hur matematiken har skapats av människor i många olika kulturer och om hur matematiken utvecklats och fortfarande utvecklas,

10. utvecklar sina kunskaper om hur matematiken används inom informationsteknik, samt hur informationsteknik kan användas vid problemlösning för att åskådliggöra matematiska samband och för att undersöka matematiska modeller.

Kursproven i matematik som konstruerats med utgångspunkt i kursplanemål och de tillhörande betygsriterierna speglar strävansmålen för skolans undervisning i gymnasiekurserna. Varje enskild uppgift i provet som prövar en viss kunskap eller färdighet inom kursen fungerar också som en indikator på i vad mån skolan i sin undervisning har strävat efter att ha utvecklat en elevs förmåga i flera avseenden. Alla uppgifter i detta prov kan därför sägas beröras av strävansmål 1 och 2. Strävansmål 3 kan mera direkt kopplas till uppgifterna 4, 7, 9, 12, 14, 15, 16 och 17 som avser indikera elevens kunskaper i modellering. Strävansmål 4 som handlar om resonemang och kommunikation berörs av uppgifterna 1, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 och 17. Strävansmål 5 berörs av uppgifterna 5, 7, 8, 9, 14, 15, 16 och 17 som kan kategoriseras som problemlösning. Strävansmål 6 berörs av 4, 8, 9, 10, 14, 15 och 16 som alla har en högre grad av öppenhet. Strävansmål 8 kan kopplas till uppgifterna 4, 7, 9, 15, 16 och 17 medan inte någon uppgift i detta prov specifikt träffar målen 7, 9 och 10.



## Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 44 poäng, varav 22 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd: 13 poäng.

Väl godkänd: 26 poäng varav minst 7 vg-poäng.

Mycket väl godkänd: För provbetyget Mycket väl godkänd gäller utöver kraven för Väl godkänd att eleven ska ha visat prov på minst *tre av de fyra* MVG-kvaliteter som de □-märkta uppgifterna ger möjlighet att visa (se tabellen nedan). Eleven ska dessutom ha minst 13 vg-poäng.

MVG-kvalitet	Uppgift				
	8	9	15b	16	17
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	○	○	○	○	○
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	■	■	■	■	○
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	○	■	■	○	○
Värderar och jämför metoder/modeller	■	■	■	■	■
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	■	■	■	○	○

**Allmänna riktlinjer för bedömning**

## 1. Allmänt

Bedömning ska ske utgående från läroplanens och kursplanens mål samt betygskriterierna, och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt.

## 2. Positiv bedömning

Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister. Uppgifterna ska bedömas med högst det antal poäng som anges i provhäftet.

## 3. g- och vg-poäng

För att tydliggöra anknytningen till betygskriterierna för betygen Godkänd respektive Väl godkänd används separata g- och vg-poängskalor vid bedömningen. Antalet möjliga g- och vg-poäng på en uppgift anges åtskilda av ett snedstreck, t.ex. 1/0 eller 2/1.

4. Uppgifter av kortsvarstyp (*Endast svar fordras*)

- 4.1 Godtagbara slutresultat av beräkningar eller resonemang ger poäng enligt bedömningsanvisningarna.
- 4.2 Bedömning av brister i svarets utformning, t.ex. otillräcklig förenkling, felaktig noggrannhet, felaktigt avrundat svar, utelämnad eller felaktig enhet lämnas till lokala beslut.

## 5. Uppgifter av långsvarstyp

- 5.1 Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng. För full poäng krävs en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas.
- 5.2 När bedömningsanvisningarna t.ex. anger +1-2g innehåller den förväntade redovisningen flera komponenter eller tankesteg som kan anses motsvara de angivna poängen<sup>1</sup>. Exempel på bedömda elevarbeten ges i anvisningarna då det kan anses särskilt påkallat. Kraven för delpoängen bestäms i övrigt lokalt.
- 5.3 I bedömningsanvisningarna till flerpoängsuppgifter är de olika poängen ibland oberoende av varandra, men oftast förutsätter t.ex. poäng för ett korrekt svar att också poäng utdelats för en godtagbar metod.<sup>2</sup>
- 5.4 Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan t.ex. gälla missuppfattning av uppgift, följdfel<sup>3</sup>, formella fel och enklare räknefel.

## 6. Aspektbedömning

Vissa mer omfattande uppgifter ska bedömas utifrån de tre aspekterna "Metodval och genomförande", "Matematiskt resonemang" samt "Redovisning och matematiskt språk" som var för sig ger g- och vg-poäng enligt bedömningsanvisningarna.

## 7. Krav för olika provbetyg

- 7.1 Den på hela provet utdelade poängen summeras dels till en totalsumma och dels till en summa vg-poäng.
- 7.2 Kravet för provbetyget Godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman.
- 7.3 Kravet för provbetyget Väl godkänd uttrycks som en minimigräns för totalsumman med tillägget att ett visst minimivärde för summan vg-poäng måste uppnås.
- 7.4 Som krav för att en elevs prov skall betraktas som en indikation på betyget Mycket väl godkänd anges minimigränser för totalsumman och summan vg-poäng. Dessutom anges kvalitativa minimikrav för redovisningarna på vissa speciellt märkta (☐) uppgifter.

<sup>1</sup> Sådana anvisningar tillämpas bland annat till uppgifter som har en sådan mångfald av lösningsmetoder att en precisering av anvisningen riskerar att utesluta godtagbara lösningar.

<sup>2</sup> Ett exempel på en bedömningsanvisning där senare poäng är beroende av tidigare är:

Godtagbar metod, t.ex. korrekt tecknad ekvation+ 1g  
med korrekt svar+ 1g

<sup>3</sup> Fel i deluppgift bör inte påverka bedömningen av de följande deluppgifterna. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela full poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av följdfel.

**Bedöm-** | Skolverket hänvisar generellt beträffande provmaterial till bestämmelsen om sekretess i 4 kap. 3 § sekretesslagen. För detta material gäller sekretessen fram till och med den 10 juni 2005.

**ningsanvisningar (MaD vt 2005)**

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

<b>Uppg.</b>	<b>Bedömningsanvisningar</b>	<b>Poäng</b>
<b>Del I</b>		
<b>1.</b>		<b>Max 2/0</b>
	Korrekt primitiv funktion	+1 g
	med godtagbart svar ( $6\frac{2}{3}$ )	+1 g
<b>2.</b>		<b>Max 2/1</b>
a)	Korrekt svar ( $f'(x) = -12 \sin 3x$ )	+1 g
b)	Korrekt svar ( $f'(x) = -12(3 - 2x)^5$ )	+1 g
c)	Korrekt svar ( $f'(x) = 2x \cdot e^{3x} + 3x^2 \cdot e^{3x}$ )	+1 vg
<b>3.</b>		<b>Max 1/0</b>
	Korrekt svar (C och F)	+1 g
<b>4.</b>		<b>Max 1/1</b>
	En godtagbart motiverad olikhet, t ex $b < a$ eftersom $b$ är negativ	+1 g
	med godtagbart motiverad ordning mellan alla tre talen ( $b < c < a$ )	+1 vg
<b>5.</b>		<b>Max 1/1</b>
	Korrekt svar ( $a = 2$ )	+1 g
	Korrekt svar ( $b = -1$ )	+1 vg
<b>6.</b>		<b>Max 0/1</b>
	Korrekt svar (D)	+1 vg

<b>Uppg.</b>	<b>Bedömningsanvisningar</b>	<b>Poäng</b>
<b>7.</b>	<p>Godtagbar ansats, t ex anger att antalet starar minskar.</p> <p>Godtagbar förklaring ("Antalet starar har sedan år 1979 minskat med ändringshastigheten 3 % per år av det aktuella antalet")</p>	<p><b>Max 1/1</b></p> <p>+1 g</p> <p>+1 vg</p>
<b>8.</b>	<p>Godtagbar ansats, t ex skissat en figur och fört in godtagbara beteckningar</p>	<p><b>Max 0/1/α</b></p> <p>+1 vg</p>

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generella metoder genom att utnyttja definitionen för trigonometri eller triangelsatserna.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra bevis genom att visa att likheten gäller för alla vinklar $B$ och $C$ .
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

**Uppg. Bedömningsanvisningar****Poäng****9.****Max 0/2/□**

Redovisad godtagbar metod, t ex  $\int_0^5 f(x) dx = \left. \frac{3}{5}x - 2 \right|_0^5$  +1 vg

med godtagbart svar (3) +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	utveckla problemet genom att tolka problemsituationen och välja att använda integralkalkylens huvudsats för att lösa problemet.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

**Del II****10.****Max 2/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer längden av de lika sidorna +1 g

med i övrigt redovisad godtagbar lösning ( $7,0 \text{ cm}^2$ ) +1 g

**11.****Max 3/0**

Godtagbart tecknad integral för arean +1 g

med korrekt primitiv funktion +1 g

med korrekt svar (36 a.e.) +1 g

**Uppg. Bedömningsanvisningar**

**Poäng**

12.

**Max 2/2**

Godtagbar ansats, t ex beräknar diagonalen

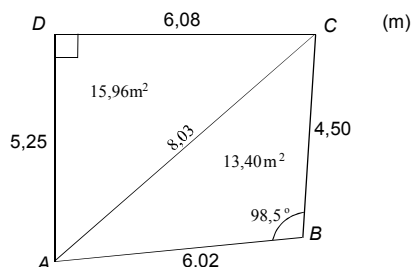
+1 g

Beräknar någon vinkel i triangeln ABC

+1 g

med i övrigt redovisad godtagbar lösning med godtagbart svar ( $29,4 \text{ m}^2$ )

+1-2 vg



13.

**Max 2/1**

Godtagbar bestämning av en vinkel ( $8,3^\circ$  eller  $51,7^\circ$ )

+1 g

Godtagbar bestämning av ytterligare en vinkel ( $8,3^\circ$  eller  $51,7^\circ$ )

+1 g

med korrekt periodicitet ( $x_1 = 8,3^\circ + n \cdot 120^\circ$  och  $x_2 = 51,7^\circ + n \cdot 120^\circ$ )

+1 vg

14.

**Max 1/1**

Godtagbar ansats, t ex skissar grafen/graferna

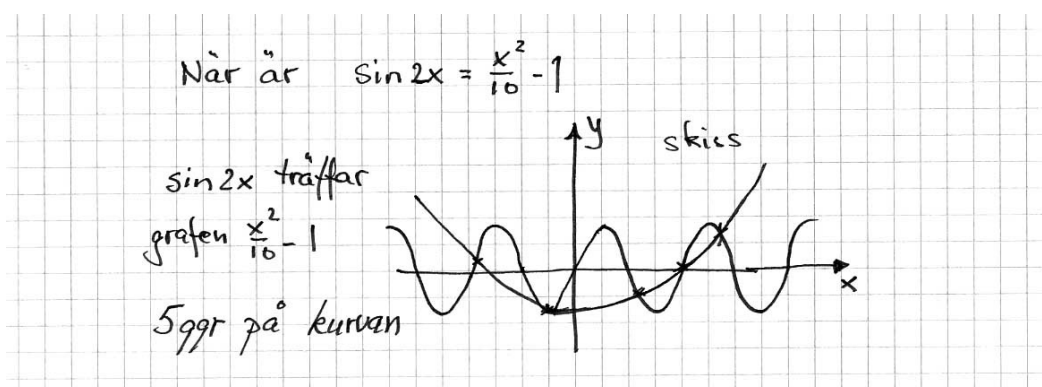
+1 g

med ett korrekt antal lösningar (6)

+1 vg

Exempel på en elevlösning och hur den poängsatts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning (1 g)**



*Kommentar:* Eleven har gjort en godtagbar skiss av graferna men missat en skärningspunkt vid avläsningen.

## Uppg. Bedömningsanvisningar Poäng

15. Max 0/4/□

- a) Funktion med korrekt amplitud och period ( $f(x) = 0,050 \sin 10\pi x$ ) +1 vg
- b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer derivatan och tecknar en integral med korrekt integrand +1 vg
- Visar insikt om att integralen måste bestämmas numeriskt, t ex med grafräknarens inbyggda program för integralberäkning +1 vg
- med godtagbart svar (7,3 m) +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	formulera och utveckla metoder genom att inse att integralen måste lösas med någon numerisk metod och utför beräkningarna med metoden, t ex grafräknarens inbyggda program.*
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	

\* Eftersom denna uppgift kräver MVG-kvalitet för sin lösning så kommer godtagbara elevlösningar att ge vg-poäng och visa på MVG-kvaliteter på samma gång.

16. Max 1/2/□

- Godtagbar ansats, t ex deriverar  $f$  korrekt +1 g
- Bestämmer  $b$  så att  $f'(0) = 0$  ( $b = 3$ ) +1 vg
- Visar insikt om att lokalt maximum ges av  $f''(x) < 0$  +1 vg

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod genom att utnyttja reglerna för derivering som underlag för sitt resonemang.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	utföra analys av matematiska resonemang genom att visa att $a < 0$ är ett nödvändigt villkor.
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

Exempel på en elevlösningar och hur de poängsätts ges nedan. Andra lösningsförslag ska bedömas på likvärdigt sätt.

**Elevlösning 1 (1 g och 2 vg och två av MVG-kvaliteterna)**

$$f(x) = ax^2 + bx - \sin 3x \quad \text{max för } x=0$$

$$f'(x) = 2ax + b - 3\cos 3x \quad f'(0) = 0$$

$$f'(0) = 2a \cdot 0 + b - 3\cos 3 \cdot 0$$

$$f'(0) = b - 3$$

$$b - 3 = 0$$

$$b = 3$$

$$f(x) = ax^2 + 3x - \sin 3x$$

$$f''(x) = 2a + 6\sin 3x$$

$$f''(0) = 2a + 6\sin 3 \cdot 0$$

$$f''(0) = 2a$$

för att  $f(x)$  ska ha maximum måste

$$f''(x) < 0$$

$$2a < 0$$

$$a < 0$$

$$f(x) = -ax^2 + 3x - \sin 3x$$

*Kommentar:* Eleven har använd generell metod och erhållit att  $a$  måste vara mindre än noll men har ej undersökt vad som händer då  $a = 0$ . Det matematiska språket är i huvudsak korrekt. Eleven visar två MVG-kvaliteter.

## Elevlösning 2 (1g och 2vg och tre av MVG-kvaliteterna)

$$f(x) = ax^2 + bx - \sin 3x$$

Lokalt maximum för  $x=0$ ?

Derivering ger:

$$f'(x) = 2ax + b - 3\cos 3x$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$f''(x) = 2a + 9\sin 3x$$

$$\text{Om } a=0 \text{ då } x=0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$\text{Om } a < 0 \text{ då } x=0 \Rightarrow f''(0) < 0 \quad \text{max. punkt}$$

$$\text{Om } a > 0 \text{ då } x=0 \Rightarrow f''(0) > 0 \quad \text{minimum}$$

Kontroll av  $f''(0) = 0$  då  $a = 0$

$$f'(x) = 3 - 3\cos 3x = 3(1 - \cos 3x)$$

Teckenstudium visar att  $f'(x) > 0$  kring  $x=0$

dus terrasspunkt

Svar:  $f$  har maximum för  $x=0$  om  $a < 0$

*Kommentar:* Eleven har utfört en korrekt beräkning. Undersökning av  $a = 0$  är gjort. Även en undersökning av  $a > 0$  är utförd, vilket inte är nödvändigt för att erhålla alla MVG-kvaliteter i uppgiften. Eleven visar tre MVG-kvaliteter.

## Uppg. Bedömningsanvisningar

Poäng

17.

Max 3/4/□

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

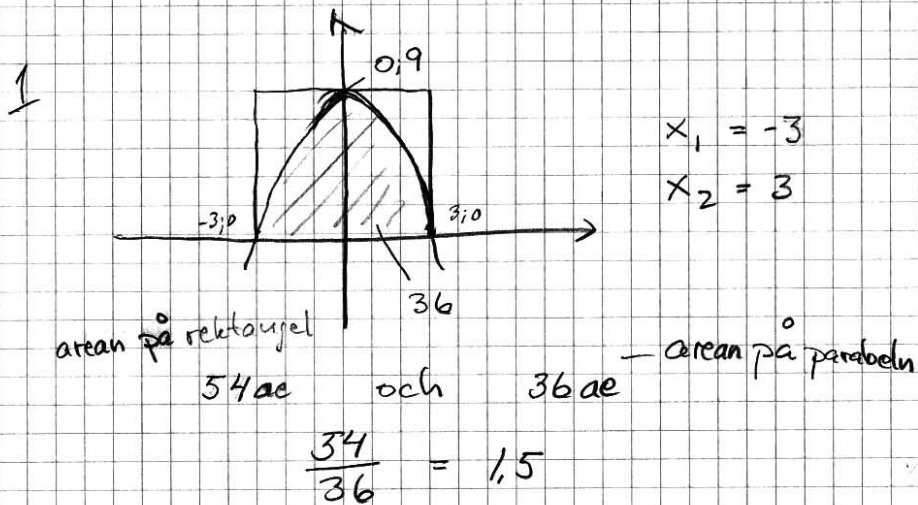
Bedömningen avser	Kvalitativa nivåer			Totalpoäng
	Lägre		Högre	
<p><b>Metodval och genomförande</b> <i>I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.</i></p> <p><i>Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</i></p>	Eleven bestämmer förhållandet mellan areorna i något specialfall	Eleven visar säkerhet i lösning av problemet genom att bestämma förhållandet mellan areorna i minst två specialfall korrekt	Eleven väljer att med generell metod teckna uttryck för areorna och gör detta korrekt i det allmänna fallet	
	<b>1-2 g</b>	<b>2 g och 1 vg</b>	<b>2 g och 2 vg</b>	<b>2/2</b>
<p><b>Matematiska resonemang</b> <i>Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</i></p>	Eleven har dragit en slutsats utifrån minst 2 specialfall	Eleven har dragit korrekt slutsats utifrån specialfall där både $a$ och $b$ varieras eller utifrån det allmänna fallet		
	<b>1 g</b>	<b>1 g och 1 vg</b>		<b>1/1</b>
<p><b>Matematiskt språk och redovisningens klarhet och tydlighet</b> <i>Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</i></p>		Redovisningen är lätt att följa och förstå och omfattar de två första punkterna eller det allmänna fallet. Det matematiska språket är acceptabelt		
			<b>1 vg</b>	<b>0/1</b>
<b>Summa</b>				<b>3/4</b>

MVG-kvaliteterna beskrivs på nästa sida

MVG-kvalitet	visar eleven i denna uppgift genom att:
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning	använda generell metod genom att vid genomförandet av beräkningarna använda allmänna beteckningar för variablerna.
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet	analysera och tolka resultat och dra korrekta slutsatser.
Genomför bevis och analyserar matematiska resonemang	genomföra analys av sina resonemang genom att visa att förhållandet mellan areorna är $\frac{2}{3}$ och detta gäller för alla positiva $a$ och $b$ .
Värderar och jämför metoder/modeller	
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk	utföra redovisningen välstrukturerat med ett i huvudsak korrekt matematiskt språk.

## Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 17.

## Elevlösning 1 (3 g och 2 vg)



2  $b = 8$

$x_1 = -2,828427$   
 $x_2 = 2,828424$

Area parabel = 30,16988933  
 Area rektangel = 45,254832

$$\frac{\text{Area parabel}}{\text{--- rektangel}} = 1,49999 \approx 1,5$$

3.  $b = 6$

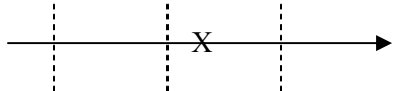
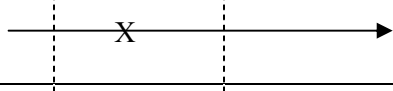
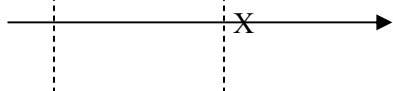
$x_1 = -2,44949$   
 $x_2 = 2,44949$

Area parabel = 19,59591794  
 — u — rektangel = 29,39388

$$\frac{\text{Area parabel}}{\text{--- rektangel}} = 1,500$$

Slutsats; När du varierar  $b$  varierar naturligtvis parabelarean konstant. Den rektangel som sträcker sig från nollställena (där kurvan  $b-ax^2$  skär  $x$ -axeln) till maximumnivån kommer också att ändras konstant. Den konstanten kommer att vara 1,5. Alltså rektangelns area kommer hela tiden att vara 1,5 gånger större parabelarean.

## Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande		2/1	Eleven bestämmer förhållandet mellan areorna i minst två fall
Matematiska resonemang		1/0	Eleven har dragit en slutsats utifrån sina beräkningar.
Redovisning och matematiskt språk		0/1	Beräkningarna är utförda med räknare. Det matematiska språket är acceptabelt, speciellt slutsatsen.
<b>Summa</b>		<b>3/2</b>	

*Kommentar:* Kvaliteten med avseende på det matematiska språket bedöms vara precis på gränsen till att erhålla 1 vg-poäng.

## Elevlösning 2 (3 g och 3 vg och □)

$$y = b - ax^2 \quad b > 0, a > 0$$

$$y = -ax^2 + b \quad y = 0; \quad x^2 - \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$$

Parabelarean

$$2 \cdot \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (b - ax^2) dx = 2 \cdot \left[ bx - \frac{ax^3}{3} \right]_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} =$$

$$= \left( b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}^3}{3} - 0 \right) \cdot 2 = 2b\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{b}{a}}^3$$

Rektangelarean:

$2\sqrt{\frac{b}{a}}$  gånger  $y = ?$  i maxpunkten.

Maxpunkten ligger alltid på  $x = 0$   
(där derivatan är noll), alltså:

$$2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot (-a \cdot 0^2 + b) = 2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot b$$

Förhållandet mellan  $P_{area}$  och  $P_{area}$  är:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot b}{2b \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{b}{a}}^3} = \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot b}{\sqrt{\frac{b}{a}} \left( 2b - \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{b}{a}}^2 \right)} =$$

$$= \frac{2b}{2b - \frac{2}{3}a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2b}{2b - \frac{2}{3}a \cdot \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2b}{b \left( 2 - \frac{2}{3}\frac{b}{a} \right)} =$$

$$= \frac{2}{2 - \frac{2}{3}\frac{b}{a}} = \frac{2}{2 \left( 1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a} \right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$$

Svar: Förhållandet är  $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}\frac{b}{a}}$

## Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	— — — — — X — — — — —	2/2	
Matematiska resonemang	— — — — — X — — — — —	1/0	Eleven har ej dragit korrekt slutsats.
Redovisning och matematiskt språk	— — — — — X — — — — —	0/1	
<b>Summa</b>		<b>3/3/□</b>	

*Kommentar:* Eleven använder generell metod, utför redovisningen välstrukturerat med i huvudsak korrekt matematiskt språk. Eleven genomför analys av sina resonemang. Felet i beräkningarna kan anses vara av lapsus karaktär, men eleven skulle ha haft möjlighet att kontrollera resultatet. Eleven visar tre MVG-kvaliteter.

## Mål för matematik kurs D

### Kursplan 2000

#### Trigonometri (T)

T1. kunna använda enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp, visa trigonometriska samband och ge fullständiga lösningar till enkla trigonometriska ekvationer samt kunna utnyttja dessa vid problemlösning,

T2. kunna rita grafer till trigonometriska funktioner samt använda dessa funktioner som modeller för verkliga periodiska förlopp,

T3. kunna härleda och använda de formler som behövs för att omforma enkla trigonometriska uttryck och lösa trigonometriska ekvationer,

T4. kunna beräkna sidor och vinklar i en godtycklig triangel,

#### Differential- och integralkalkyl (D)

D5. kunna förklara deriveringsreglerna och själv i några fall kunna härleda dem, för trigonometriska funktioner, logaritmfunktioner, sammansatta funktioner, produkt och kvot av funktioner samt kunna tillämpa dessa regler vid problemlösning,

D6. kunna använda andraderivatan i olika tillämpade sammanhang,

D7. kunna förklara och använda tankegången bakom någon metod för numerisk ekvationslösning samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara,

D8. kunna förklara innebörden av begreppet differentialekvation och kunna ge exempel på några enkla differentialekvationer och redovisa problemsituationer där de kan uppstå,

D9. kunna bestämma primitiva funktioner och använda dessa vid tillämpad problemlösning,

D10. kunna förklara innebörden av begreppet integral och klargöra sambandet mellan integral och derivata samt kunna ställa upp, tolka och använda integraler i olika typer av grundläggande tillämpningar,

D11. kunna redogöra för tankegången bakom och kunna använda någon metod för numerisk integration samt vid problemlösning kunna använda grafisk, numerisk eller symbolhanterande programvara för att beräkna integraler,

#### Övrigt(Ö)

Ö1. kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning

Ö4. med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser,

Ö5. under eget ansvar analysera, genomföra och redovisa, muntligt och skriftligt, en något mer omfattande uppgift där kunskaper från olika områden av matematiken används.

## Betygskriterier 2000

### Kriterier för betyget Godkänd

- G1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder och tillvägagångssätt för att formulera och lösa problem i ett steg.
- G2: Eleven genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- G3: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner samt utför beräkningar på ett sådant sätt att det är möjligt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck.
- G4: Eleven skiljer gissningar och antaganden från givna fakta och härledningar eller bevis.

### Kriterier för betyget Väl godkänd

- V1: Eleven använder lämpliga matematiska begrepp, metoder, modeller och tillvägagångssätt för att formulera och lösa olika typer av problem.
- V2: Eleven deltar i och genomför matematiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V3: Eleven gör matematiska tolkningar av situationer eller händelser samt genomför och redovisar sitt arbete med logiska resonemang såväl muntligt som skriftligt.
- V4: Eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner på sådant sätt att det är lätt att följa, förstå och pröva de tankar som kommer till uttryck såväl muntligt som skriftligt.
- V5: Eleven visar säkerhet beträffande beräkningar och lösning av olika typer av problem och använder sina kunskaper från olika delområden av matematiken.
- V6: Eleven ger exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden.

### Kriterier för betyget Mycket väl godkänd

- M1: Eleven formulerar och utvecklar problem, väljer generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång med korrekt matematiskt språk.
- M2: Eleven analyserar och tolkar resultat från olika typer av matematisk problemlösning och matematiska resonemang.
- M3: Eleven deltar i matematiska samtal och genomför såväl muntligt som skriftligt matematiska bevis.
- M4: Eleven värderar och jämför olika metoder, drar slutsatser från olika typer av matematiska problem och lösningar samt bedömer slutsatsernas rimlighet och giltighet.
- M5: Eleven redogör för något av det inflytande matematiken har och har haft för utvecklingen av vårt arbets- och samhällsliv samt för vår kultur.

**Kopieringsunderlag för aspektbedömning**

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	_____→		
Matematiska resonemang	_____→		
Redovisning och matematiskt språk	_____→		
<b>Summa</b>			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	_____→		
Matematiska resonemang	_____→		
Redovisning och matematiskt språk	_____→		
<b>Summa</b>			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	_____→		
Matematiska resonemang	_____→		
Redovisning och matematiskt språk	_____→		
<b>Summa</b>			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	_____→		
Matematiska resonemang	_____→		
Redovisning och matematiskt språk	_____→		
<b>Summa</b>			

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	_____→		
Matematiska resonemang	_____→		
Redovisning och matematiskt språk	_____→		
<b>Summa</b>			

## Kopieringsunderlag för bedömning av MVG-kvaliteter

Elevers namn: .....	Uppgift (☐-märkt)					Övriga uppgifter
	8	9	15b	16	17	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevers namn: .....	Uppgift (☐-märkt)					Övriga uppgifter
	8	9	15b	16	17	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						

Elevers namn: .....	Uppgift (☐-märkt)					Övriga uppgifter
	8	9	15b	16	17	
MVG-kvalitet						
Formulerar och utvecklar problem, använder generella metoder/modeller vid problemlösning						
Analyserar och tolkar resultat, drar slutsatser samt bedömer rimlighet						
Genomför bevis och/eller analyserar matematiska resonemang						
Värderar och jämför metoder/modeller						
Redovisar välstrukturerat med korrekt matematiskt språk						